Теория ФП

Лекция 1.

ВМК МГУ, 2010. Контакты: ximaera@cs.msu.su, http://haskell.secsem.ru

λ-исчисление

- Изначально: решение парадокса Рассела
  - Неудача
- Ныне – моделирование:
  - Связывания переменных
  - Вычислительных процессов
  - Структур данных
  - Типизации
  - И других механизмов

Формальная система (1/5)

- Четвёрка <S, F, A, R>
  - S – алфавит
  - F – множество выражений (формул)
  - A⊆F – аксиомы
  - R – правила вывода

Формальная система (2/5)

- Четвёрка <S, F, A, R>
  - S – алфавит. S = { As, (,) } ∪ I
    - As – абстрактор
      - Изначально циркумфлекс («^»): ŷF
      - Позднее карет «^»: ^yF
      - Ныне и почти везде – лямбда («λ») и точка («.»): λy.F
      - Во Франции – квадратные скобки: [y]F
      - В текстовом виде – бэкслэш («\») и точка («.»): \y.F
    - I – идентификаторы
      - Любое множество наборов символов, удобное для моделирования
      - В курсе – строчные латинские буквы с индексами
    - (,) – скобки

Множество λ-термов

- Λ. Индуктивно:
  1. $I \subset \Lambda$
  2. $i \in I,\ L \in \Lambda \Rightarrow \lambda i.L \in \Lambda$
  3. $L \in \Lambda \Rightarrow (L) \in \Lambda$
  4. $L,\ K \in \Lambda \Rightarrow (LK) \in \Lambda$
- Примеры:
  1. x, y, z, a, b, x^5…
  2. λx.x, λx.xx, λx.yz, ...
  3. (x), (λx.yz), …
  4. (λx.yz)a, (λx.xx)(λx.xx), …

- Для читаемости можно убрать скобки:
  - λx.(λy.(λz.M))
  - λxyz.M

Формальная система (3/5)

- Четвёрка <S, F, A, R>

  - F – множество выражений (формул).

    $F = \{ L{=}K \mid L, K \in \Lambda \}$

    - Формулы из F могут быть **выводимы** или **не выводимы** в формальной системе
    - Выводимость обозначается символом $\vdash$
    - Как понять, выводима ли формула в формальной системе (ФС)?

Подстановка (1/3)

- $\forall M \in \Lambda$:
  - $FV(M) \subseteq I$ – множество свободных идентификаторов (Free Variables).
  - $BV(M) \subseteq I$ – множество связанных идентификаторов (Bound Variables).

- $x \in FV(M)$:
  0. $M = x$
  1. $M = \lambda y.N$, $x \neq y$, $x \in FV(N)$
  2. $M = (NL)$, $x \in FV(N) \cup FV(L)$
  3. $M = N$, $x \in FV(N)$

- $x \in BV(M)$:
  1. $M = \lambda y.N$, $x = y$
  2. $M = (NL)$, $x \in BV(N) \cup BV(L)$
  3. $M = N$, $x \in BV(N)$

Подстановка (2/3)

- Примеры:
  - $M=\lambda x.x$: x – связана ($x \in BV(M)$)
  - $M=\lambda x.y$: y – свободна ($y \in FV(M)$)
  - $M=\lambda x.xy$: x – связана, y – свободна
  - $M=(\lambda x.x)x$: x и свободна, и связана: $x \in FV(M) \wedge BV(M)$

Подстановка (3/3)

- Подстановка $[x/M]$ *(также $[x \leftarrow M]$, $[x := M]$)* переменной $x \in I$ в выражение $M \in \Lambda$ определяется индуктивно. $\forall L, N \in \Lambda$, $\forall y, z \in I$:
  1. $x[x/M] = M$
  2. $y[x/M] = y$
  3. $(\lambda x.N)[x/M] = \lambda x.N$
  4. $(\lambda y.N)[x/M]$
     $= \lambda y.N[x/M], \; y \notin FV(M)$
     $= (\lambda z.N[y/z])[x/M], \; y \in FV(M)$
  5. $(NL)[x/M] = N[x/M]L[x/M]$

Формальная система (4/5)

- Четвёрка <S, F, A, R>

- $A \subseteq F$ – аксиомы. Всегда выводимые в ФС формулы
  1. $\lambda x.M = \lambda y.M[x/y]$ – аксиома α-конверсии
  2. $(\lambda x.M)N = M[x/N]$ – аксиома β-конверсии
  3. $M = M$
  - Дополнительно в ряде литературы принимается аксиома η-конверсии: $\lambda x.Mx = M$

Формальная система (5/5)

- Четвёрка <S, F, A, R>

  - R – правила вывода. $\forall L, M, N \in \Lambda, \forall x,y \in I$:
    1. M=N => N=M
    2. M=N, N=L => M=L
    3. M=N => ML=NL
    4. M=N => LM=LN
    5. «Правило ξ»: M=N => λx.M=λx.N

Редукция (1/6)

- Редукция – это правила, в соответствии с которыми λ-выражение можно преобразовать в другое λ-выражение
- Одношаговая редукция (→, ->) по правилу R (R-редукция):
  1. R
  2. Правила вывода 3, 4, 5
  3. $M \to N,\ L \to K \Rightarrow ML \to NK$

Редукция (2/6)

- Редукция – это правила, в соответствии с которыми λ-выражение можно преобразовать в другое λ-выражение
- Пример: одношаговая редукция по правилу β-конверсии (одношаговая **β-редукция**):

1. $(\lambda x.M)N \rightarrow M[x/N]$
2. $M \rightarrow N \Rightarrow ML \rightarrow NL$
3. $M \rightarrow N \Rightarrow LM \rightarrow LN$
4. $M \rightarrow N \Rightarrow \lambda x.M \rightarrow \lambda x.N$
5. $M \rightarrow N,\ L \rightarrow K \Rightarrow ML \rightarrow NK$

Редукция (3/6)

- Редукция – это правила, в соответствии с которыми λ-выражение можно преобразовать в другое λ-выражение
- Пример: проведём **одношаговые β-редукции** λ-выражения:
  - (λxy.yyx)ab → (λy.yya)b
  - (λy.yya)b → bba

Редукция (4/6)

- Редукция – это правила, в соответствии с которыми λ-выражение можно преобразовать в другое λ-выражение
- Многошаговая редукция (->>) по правилу R:
  1. Правило вывода 1: M ->> N => N ->> M
  2. M -> N => M ->> N
  3. M ->> N, N ->> L => M ->> L

Редукция (5/6)

- Редукция – это правила, в соответствии с которыми λ-выражение можно преобразовать в другое λ-выражение
- Пример: проведём **многошаговую β-редукцию** λ-выражения:
  - (λxy.yyx)ab → (λy.yya)b
  - (λy.yya)b → bba
  - Поэтому (λxy.yyx)ab ->> bba
  - Но (λxy.yyx)ab → bba **не выводимо**!

Редукция (6/6)

- Отношение многошаговой R-редукции:
  - является
    - рефлексивным
    - симметричным
    - транзитивным

    => обладает свойством эквивалентности

    => разбивает множество Λ на классы эквивалентности

Нормальная форма (1/2)

- Нормальная форма – представитель класса эквивалентности λ-термов
- R-редекс – левая часть R-редуцируемого выражения.
- R-свёртка – правая часть.
  - $\lambda x.M = \lambda y.M[x/y]$
    - α-конверсия
    - $\lambda x.M$ – α-редекс
    - $\lambda y.M[x/y]$ – α-свёртка
  - $(\lambda x.M)N = M[x/N]$
    - β-конверсия
    - $(\lambda x.M)N$ – β-редекс
    - $M[x/N]$ – β-свёртка

Нормальная форма (2/2)

- Нормальная форма – представитель класса эквивалентности λ-термов
- R-нормальная форма λ-выражения – форма, не содержащая R-редексов
- Нормальная форма λ-выражения – это β-нормальная форма этого выражения
- Семантика нормальной формы – **результат вычисления**!

Семантика λ-исчисления

- Кстати, о семантике
  - Мы описали только синтаксис
  - Какой в нем смысл? Это тема следующей лекции.